Лекція 3. Інтегрування заміною змінних

Короткий зміст

У цій лекції:

— обґрунтовано один із основних методів інтегрування — інтегрування заміною змінних;

— на прикладах розглянуто два способи інтегрування заміною замінної: уведення функції під знак диференціала і власне заміна змінної.

3.1. Обґрунтування методу заміни змінної

Метод інтегрування заміною змінної полягає у запровадженні нової змінної інтегрування (підстановкі). При цьому заданий інтеграл зводиться до нового інтегралу, який є простішим за шуканий.

Нехай функції $f(x)$ та $\varphi(t)$ задано відповідно в інтервалах $(a;b)$ та $(\alpha;\beta)$, причому функція φ відображує проміжок $(\alpha;\beta)$ на $(a;b)$.

Теорема 3.1. Якщо функція $f(x)$ неперервна в інтервалі $(a;b)$, функція $\varphi(t)$ неперервно диференційовна і строго монотонна в інтервалі $(\alpha;\beta)$, причому $\varphi'(t) \neq 0$, то правдива *формула інтегрування заміною змінної*:

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

де у праву частину треба підставити $t = \varphi^{-1}(x)$.

► Із строгої монотонності функції φ випливає, що вона має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$. Щоб довести рівність

$$\int f(x)dx = \int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt,$$

здиференціюємо ліву та праву її частини за змінною x:

$$\left(\int f(x)dx\right)'_x = f(x);$$

$$\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_x = \left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)'_t \cdot t'_x =$$
$$= f[\varphi(t)]\varphi'(t)\frac{1}{\varphi'(t)} = f[\varphi(t)] = f(x).$$

Тут враховано, що похідна оберненої функції

$$t'_x = \frac{1}{x'_t} = \frac{1}{\varphi'(t)}, \varphi'(t) \neq 0.$$

Оскільки похідні вказаних вище інтегралів рівні, то ці інтеграли визначають одну й ту саму сукупність функцій, а саме — множину первісних функцій $f(x)$. ◄

Доведену теорему застосовують одним із таких двох способів:

1) інтеграл $\int g(x)dx$ записують у вигляді

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx,$$

у якому для функції f відома первісна F, тоді

$$\int g(x)dx = \int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C;$$

2) після підстановки $x = \varphi(t)$ інтеграл $\int g(x)dx$ набуває вигляду

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(t)dt,$$

де функція $x = \varphi(t)$ має обернену функцію $t = \varphi^{-1}(x)$ і для функції $f(t)$ відома первісна F, тоді

$$\int g(x)dx = \int g(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \int f(t)dt = F(t) + C = F(\varphi^{-1}(x)) + C.$$

У першому способі йдеться про «введення функції під знак диференціала»:

$$\varphi'(x)dx = d\varphi(x),$$

а у другому — про «виведення функції з-під знаку диференціала»:

$$dx = d\varphi(t) = \varphi'(t)dt.$$

Неможливо сформулювати загальне правило вибору заміни змінної для інтегрування будь-якої функції. Це можна зробити лише для інтегрування окремих класів функцій (раціональних, тригонометричних, ірраціональних тощо).

3.2. Уведення функції під знак диференціала

3.2.1. Лінійна підстановка

Розгляньмо спершу найпростіший випадок інтегрування введенням функції під знак диференціала, що дозволяє за відомими інтегралом

$$\int f(u)du = F(u) + C$$

знайти інтеграл

$$\int f(au + b)du.$$

За властивістю інваріантності маємо

$$\int f(au + b)d(au + b) = F(au + b) + C.$$

Встановімо зв'язок між du та $d(au + b)$:

$$d(au + b) = (au + b)'du = adu.$$

Отже,

$$du = \frac{1}{a}d(au + b).$$

Тоді,

$$\int f(au + b)du = \begin{vmatrix} d(au + b) = adu; \\ du = \dfrac{1}{a}d(au + b) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{a}\int f(au + b)d(au + b) = \frac{1}{a}F(au + b) + C.$$

Приклад 3.1. Знайдімо інтеграл $\int \sqrt{2x + 3}dx$.

❍ $$\int \sqrt{2x + 3}dx = \begin{vmatrix} d(2x + 3) = 2dx; \\ dx = \dfrac{1}{2}d(2x + 3) \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (2x+3)^{1/2} 2dx = \frac{1}{2}\int (2x+3)^{1/2} d(2x+3) =$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{(2x+3)^{1/2+1}}{1/2+1} + C = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(2x+3)^{3/2} + C =$$
$$= \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3} + C. \quad \bullet$$

3.2.2. Вилучення повного квадрату

Ще одним корисним і ефективним перетворенням підінтегрального виразу перед використанням введення під знак диференціала є вилучення повного квадрату, яке ґрунтується на формулах:

$$a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2.$$

Вираз $x^2 + px + q$ перетворюють у такий спосіб:

$$x^2 \pm px + q = \left(x^2 \pm 2x\frac{p}{2} + \frac{p^2}{4}\right) - \frac{p^2}{4} + q =$$
$$= \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \frac{p^2}{4} + q.$$

Приклад 3.2. Знайдімо інтеграл $\int \frac{dx}{x^2-5x+4}$.

❍ Вилучаємо спершу повний квадрат у знаменнику

$$x^2 - 5x + 4 = x^2 - 2x\cdot\frac{5}{2} + \frac{25}{4} + 4 - \frac{25}{4} =$$
$$= \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}.$$

Отже,

$$\int \frac{dx}{x^2-5x+4} = \left| \begin{array}{c} x^2 - 5x + 4 = x^2 - 2x\cdot\frac{5}{2} + \frac{25}{4} + 4 - \frac{25}{4} = \\ = \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{dx}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} = \int \frac{d\left(x - \frac{5}{2}\right)}{\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}} =$$

$$= \left| \begin{aligned} a^2 &= \frac{9}{4}, \\ a &= \frac{3}{2} \end{aligned} \right| = \frac{1}{2 \cdot \frac{3}{2}} \ln \left| \frac{x - \frac{5}{2} - \frac{3}{2}}{x - \frac{5}{2} + \frac{3}{2}} \right| + C =$$

$$= \frac{1}{3} \ln \left| \frac{x-4}{x-1} \right| + C. \bullet$$

3.2.3. Загальний випадок

Метод інтегрування введенням під знак диференціала ґрунтується на формулі

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int f(\varphi(x))d\varphi(x) = F(\varphi(x)) + C,$$

у якій неявно використовують підстановку $u = \varphi(x)$:

$$\boxed{\begin{gathered} \int f(g(x))dg(x) = \Big| \; u = g(x) \Big| = \int f(u)du = \\ = F(u) + C = F(g(x)) + C. \end{gathered}}$$

Найважливішим для ефективного використання методу є «побачити» у підінтегральній функції множник, що є похідною внутрішнього аргументу складеної функції і ввести його під знак диференціала.

зовнішня функція

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$$

внутрішня функція

похідна внутрішньої функції

Приклад 3.3. Знайдімо інтеграли:

1) $\int (x^2+4)^6 2x dx$;

2) $\int \sin^4 x \cos x dx$.

❍ 1. В інтегралі $\int (x^2+4)^6 2xdx$ маємо:

зовнішню функція $f(u) = u^6$,

внутрішню функція $u = \varphi(x) = x^2 + 6$,

похідну від внутрішньої функції $u' = 2x$:

$$\int \underbrace{(x^2+4)^6}_{u^6}\,\underbrace{2x}_{u'}\,dx = \left| d(x^2+4) = 2xdx \right| =$$
$$= \int (x^2+4)^6 d(x^2+4) = \frac{(x^2+4)^7}{7} + C.$$

Щоб уникнути помилок, варто завжди записувати перетворення, яке взяте у прямі дужки.

2. В інтегралі $\int \sin^4 x \cos x dx$ маємо:

зовнішню функція $f(u) = u^4$,
внутрішню функція $u = \varphi(x) = \sin x$,
похідну від внутрішньої функції $u' = \cos x$:

$$\int \sin^4 x \cos x dx = \left| d(\sin x) = \cos x dx \right| =$$
$$= \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C. \quad \bullet$$

Часто використовують такі перетворення диференціала («підведення під знак диференціала»):

$$f'(x)dx = df(x);$$
$$xdx = \frac{1}{2}d(x^2); \qquad \frac{1}{x}dx = d(\ln x);$$
$$\cos x dx = d(\sin x); \qquad \sin x dx = -d(\cos x);$$
$$\frac{1}{\cos^2 x}dx = d(\operatorname{tg} x); \quad \frac{1}{\sin^2 x}dx = -d(\operatorname{ctg} x);$$
$$\frac{1}{1+x^2}dx = d(\operatorname{arctg} x); \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx = d(\arcsin x).$$

Приміром, табличні інтеграли можна одержати введенням функції під знак диференціала:

$$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = \left| d(\cos x) = -\sin x dx \right| =$$
$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + C;$$
$$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x}{\sin x}dx = \left| d(\sin x) = \cos x dx \right| =$$
$$= \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln\left|\sin x\right| + C.$$

3.3. Окремі випадки заміни змінної

Приклад 3.4. Знайдімо за допомогою заміни змінної інтеграли:

1) $\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}}$;

2) $\int x(3x-10)^{20}dx$;

3) $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$.

❍ 1. Замінімо змінну x так, щоб позбутися ірраціональності під знаком інтеграла. Для цього покладімо

$$e^x - 1 = t^2, t \geq 0 \Rightarrow e^x = t^2 + 1.$$

Тобто

$$x = \ln(t^2+1) \Rightarrow dx = \frac{2tdt}{t^2+1}.$$

Тоді

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x - 1}} = \left| \begin{array}{l} e^x - 1 = t^2, t \geq 0 \Rightarrow t = \sqrt{e^x - 1}; \\ x = \ln(t^2+1), dx = \dfrac{2t}{t^2+1} \end{array} \right|$$

$$\int \frac{2dt}{t^2+1} = 2\operatorname{arctg} t + C = \Big|_{t=\sqrt{e^x-1}}\Big| =$$

$$= 2\operatorname{arctg}\sqrt{e^x - 1} + C. \quad ●$$

$$2. \int x(3x-10)^{20}dx = \left| \begin{array}{l} 3x - 10 = t; \\ x = \dfrac{t+10}{3}, \\ dx = \dfrac{1}{3}dt \end{array} \right| = \int \frac{t+10}{3} t^{20} \cdot \frac{1}{3}dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int (t^{21} + 10t^{20})dt = \frac{1}{9}\left(\frac{t^{22}}{22} + \frac{10t^{21}}{21}\right) + C =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(3x-10)^{22}}{22} + \frac{10}{21}(3x-10)^{21}\right) + C.$$

3. Щоб знайти інтеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}}$ застосуємо тригонометричну підстановку $x = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, ідея якої полягає у перетворенні виразу $4 - x^2$ на квадрат тригонометричної функції:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(4-x^2)^3}} = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t, t \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], \\ \sqrt{4-x^2} = \sqrt{4-4\sin^2 t} = 2\cos t \\ dx = 2\cos t dt; \\ \sin t = \frac{x}{2}, t = \arcsin\frac{x}{2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{2\cos t dt}{8\cos^3 t} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\cos^2 t} = \frac{1}{4}\operatorname{tg} t + C =$$

$$= \frac{1}{4}\frac{\sin t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} = \frac{1}{4}\frac{x}{2\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}} + C = \frac{x}{4\sqrt{4-x^2}} + C. \; \bullet$$