Контрольні запитання

1. Запишіть формулу інтегрування заміною змінних і умови її використання.
2. За яким принципом вибирають функцію для заміни змінної $x = \varphi(t)$ або $t = \psi(x)$.
3. Як зв'язані інтегрування заміною змінних і введення функції під знак диференціала?

Навчальні задачі

Навчальна задача 3.1.

Знайти інтеграл: (опрацювання формул 1 та 2):

1) $\int (2x+1)^{10} dx;$

2) $\int \sqrt[3]{(5x+2)^5} dx;$

3) $\int (x^2+4)^6 2x dx;$

4) $\int \sqrt{x^3-3} \cdot x^2 dx =$

5) $\int \sin^4 x \cos x dx;$

6) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2} dx;$

7) $\int \frac{dx}{x \ln^3 x};$

8) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}};$

9) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx;$

10) $\int \frac{\sin x}{\sqrt{3-\cos x}} dx;$

11) $\int \frac{dx}{2x+7};$

12) $\int \frac{x^3}{x^4+4} dx;$

13) $\int \operatorname{tg} x dx;$

14) $\int \operatorname{ctg} x dx;$

15) $\int \frac{e^x}{e^x+1} dx;$

16) $\int \frac{dx}{e^x+1}$;

17) $\int \frac{dx}{x\ln x}$;

18) $\int \frac{dx}{x^3+x}$;

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+1\right)^3}}$.

❍ 1) $\int (2x+1)^{10}dx = \left| dx = \frac{1}{2}d(2x+1)\right| = \int (2x+1)^{10}\cdot\frac{1}{2}d(2x+1) =$

$$= \frac{1}{2}\int (2x+1)^{10}d(2x+1) = \frac{1}{2}\frac{(2x+1)^{11}}{11} + C.$$

2) $\int \sqrt[3]{(5x+2)^5}dx = \left| dx = \frac{1}{5}d(5x+2)\right| =$

$$= \frac{1}{5}\int (5x+2)^{5/3}d(5x+2) = \frac{1}{5}\frac{(5x+2)^{8/3}}{8/3} + C = \frac{3}{40}\sqrt[3]{(5x+2)^8} + C.$$

3) $\int \underbrace{(x^2+4)^6}_{u^6}\underbrace{2x}_{u'}dx = \begin{vmatrix} d(x^2+4) = \\ = 2xdx \end{vmatrix}$

$$= \int (x^2+4)^6 d(x^2+4) = \frac{(x^2+4)^7}{7} + C.$$

4) $\int \sqrt{x^3-3}\cdot x^2dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{(x^3-3)^{1/2}}_{u^{1/2}}\underbrace{3x^2}_{u'}dx = \begin{vmatrix} d(x^3-3) = \\ = 3x^2dx \end{vmatrix} =$

$$= \frac{1}{3}\int (x^3-3)^{1/2}d(x^3-3) = \frac{1}{3}\frac{(x^3-3)^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}\sqrt{(x^3-3)^3} + C.$$

5) $\int \sin^4 x\cos x dx = \begin{vmatrix} d(\sin x) = \\ = \cos x dx \end{vmatrix} = \int \sin^4 x d(\sin x) = \frac{\sin^5 x}{5} + C.$

6) $\int \frac{\operatorname{arctg}^3 x}{1+x^2}dx = \begin{vmatrix} d(\operatorname{arctg} x) = \\ = \dfrac{dx}{x^2+1} \end{vmatrix} = \int \operatorname{arctg}^3 x d(\operatorname{arctg} x) = \frac{\operatorname{arctg}^4 x}{4} + C.$

7) $\int \frac{dx}{x\ln^3 x} = \left| \frac{dx}{x} = d(\ln x)\right| =$

$$= \int \frac{d(\ln x)}{\ln^3 x} = \int \ln^{-3} x d(\ln x) = \frac{\ln^{-2} x}{-2} + C = -\frac{1}{2\ln^2 x} + C.$$

8) $$\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}} = \left| xdx = -\frac{1}{2} d(1-x^2) \right| = -\frac{1}{2} \int \frac{d(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}} =$$
$$= -\frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{1-x^2} + C = -\sqrt{1-x^2} + C.$$

9) $$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx = \left| \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = d(\arcsin x) \right| =$$
$$= \int \arcsin x d \arcsin x = \frac{\arcsin^2 x}{2} + C.$$

10) $$\int \frac{\sin x}{\sqrt{3-\cos x}} dx = \left| \begin{array}{l} d(3-\cos x) = \\ = \sin x dx \end{array} \right|$$
$$= \int \frac{d(3-\cos x)}{\sqrt{3-\cos x}} = 2\sqrt{3-\cos x} + C.$$

11) $$\int \frac{dx}{2x+7} = \left| d(2x+7) = 2dx \right| =$$
$$= \frac{1}{2} \int \frac{d(2x+7)}{2x+7} = \frac{1}{2} \ln\left|2x+7\right| + C.$$

12) $$\int \frac{x^3}{x^4+4} dx = \left| \begin{array}{l} d(x^4+4) = \\ = 4x^3 dx \end{array} \right| =$$
$$= \frac{1}{4} \int \frac{d(x^4+4)}{x^4+4} = \frac{1}{4} \ln(x^4+4) + C.$$

13) $$\int \operatorname{tg} x dx = \int \frac{\sin x dx}{\cos x} = \left| \sin x dx = d(\cos x) \right| =$$
$$= -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln\left|\cos x\right| + C.$$

14) $$\int \operatorname{ctg} x dx = \int \frac{\cos x dx}{\sin x} = \left| \cos dx = d(\sin x) \right| =$$
$$= \int \frac{d(\sin x)}{\sin x} = \ln\left|\sin x\right| + C.$$

15) $$\int \frac{e^x}{e^x+1} dx = \int \frac{d(e^x+1)}{e^x+1} = \ln(e^x+1) + C.$$

16) $$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \frac{e^{-x} dx}{1+e^{-x}} = \left| e^{-x} dx = -d(1+e^{-x}) \right| =$$
$$= -\int \frac{d(1+e^{-x})}{1+e^{-x}} = -\ln(1+e^{-x}) + C = x - \ln(1+e^x) + C.$$

$$17)\ \int \frac{dx}{x\ln x} = \left|\frac{dx}{x} = d(\ln x)\right| = \int \frac{d(\ln x)}{\ln x} = \ln\left|\ln x\right| + C.$$

$$18)\ \int \frac{dx}{x^3 + x} = \int \frac{x^{-3}}{1 + x^{-2}}dx = \left|x^{-3}dx = -\frac{1}{2}d\left(1 + x^{-2}\right)\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int \frac{d\left(1 + x^{-2}\right)}{1 + x^{-2}} = -\frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) + C.$$

$$19)\ \int \frac{dx}{\sqrt{\left(x^2 + 1\right)^3}} = \int \frac{x^{-3}}{\left(1 + x^{-2}\right)^{3/2}}dx = \left|x^{-3}dx = -\frac{1}{2}d\left(1 + x^{-2}\right)\right| =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (1 + x^{-2})^{-3/2}d(1 + x^{-2}) =$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\frac{(1 + x^{-2})^{-1/2}}{-1/2} + C = \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}} + C. \bullet$$

Навчальна задача 3.2.

Знайти інтеграли (опрацювання формули 3 та 4):

1) $\int e^{5x+1}dx;$

2) $\int e^{2x^2+1}xdx;$

3) $\int e^{\sin x}\cos xdx;$

4) $\int e^{x-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx;$

5) $\int \frac{2^{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x}.$

$$❍1)\ \int e^{5x+1}dx = \frac{1}{5}\int e^{5x+1}d(5x + 1) = \frac{1}{5}e^{5x+1} + C.$$

$$2)\ \int e^{2x^2+1}xdx = \frac{1}{4}\int e^{2x^2+1}d(2x^2 + 1) = \frac{1}{4}e^{2x^2+1} + C;$$

$$3)\ \int e^{\sin x}\cos xdx = \int e^{\sin x}d(\sin x) = e^{\sin x} + C.$$

$$4)\ \int e^{x-\frac{1}{x}}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right)dx = \int e^{x-\frac{1}{x}}d\left(x - \frac{1}{x}\right) = e^{x-\frac{1}{x}} + C.$$

$$5)\ \int \frac{2^{\operatorname{tg} x}dx}{\cos^2 x} = \int 2^{\operatorname{tg} x}d(\operatorname{tg} x) = \frac{2^{\operatorname{tg} x}}{\ln 2} + C. \bullet$$

Навчальна задача 3.3.

Знайти інтеграли (опрацювання формул 5–8):

1) $\int \sin 3xdx;$

2) $\int \cos x^2 \cdot xdx;$

3) $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x}$;

4) $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)}$.

❍ 1) $\int \sin 3x dx = \frac{1}{3}\int \sin 3x d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

2) $\int \cos x^2 \cdot x dx = \frac{1}{2}\int \cos x^2 d(x^2) = \frac{1}{2}\sin x^2 + C$.

3) $\int \frac{e^x dx}{\cos^2 e^x} = \int \frac{d(e^x)}{\cos^2 e^x} = \operatorname{tg} e^x + C$.

4) $\int \frac{dx}{x\sin^2(\ln x)} = \int \frac{d(\ln x)}{\sin^2(\ln x)} = -\operatorname{ctg}(\ln x) + C$.●

Навчальна задача 3.4. Знайти інтеграли (опрацювання формул 14 та 16):

1) $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 25}$;

2) $\int \frac{dx}{2x^2 + 3}$;

3) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 1}$;

4) $\int \frac{\cos x dx}{5 + \sin^2 x}$;

5) $\int \frac{x}{9 + x^4} dx$;

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 4x}}$;

7) $\int \frac{dx}{\sqrt{36 - 49x^2}}$;

8) $\int \frac{x dx}{\sqrt{1 - x^4}}$.

❍ 1) $\int \frac{dx}{x^2 + 8x + 25} = \int \frac{d(x+4)}{(x+4)^2 + 3^2} = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\frac{x+4}{3} + C$.

2) $\int \frac{dx}{2x^2 + 3} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2 + 3/2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{3}{2}}x + C$.

3) $\int \frac{e^{2x} dx}{e^{4x} + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{d(e^{2x})}{e^{4x} + 1} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} e^{2x} + C$.

4) $\displaystyle\int \frac{\cos x dx}{5+\sin^2 x} = \int \frac{d(\sin x)}{5+\sin^2 x} = \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\left(\frac{\sin x}{\sqrt{5}}\right) + C.$

5) $\displaystyle\int \frac{x}{9+x^4}dx = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{9+x^4} = \frac{1}{6}\operatorname{arctg}\frac{x^2}{3} + C.$

6) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x}} = \int \frac{dx}{\sqrt{4-(x^2+4x+4)}} =$

$$= \int \frac{d(x+2)}{\sqrt{4-(x+2)^2}} = \arcsin\frac{x+2}{2} + C.$$

7) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{36-49x^2}} = \frac{1}{7}\int \frac{dx}{\sqrt{36/49-x^2}} = \frac{1}{7}\arcsin\frac{7}{6}x + C.$

8) $\displaystyle\int \frac{xdx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\int \frac{d(x^2)}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{1}{2}\arcsin x^2 + C.$●

Навчальна задача 3.5. Знайти інтеграли (опрацювання формул 13 та 15):

1) $\displaystyle\int \frac{dx}{7-9x^2};$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{23x^2-14}};$

3) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1-x^8}dx;$

4) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x-1}}.$

❍1) $\displaystyle\int \frac{dx}{7-9x^2} = -\frac{1}{9}\int \frac{dx}{x^2-7/9} =$

$$= -\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{2\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}}\ln\left|\frac{x-\frac{\sqrt{7}}{3}}{x+\frac{\sqrt{7}}{3}}\right| + C = -\frac{1}{6\sqrt{7}}\ln\left|\frac{3x-\sqrt{7}}{3x+\sqrt{7}}\right| + C.$$

2) $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{23x^2-14}} = \frac{1}{\sqrt{23}}\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-14/23}} =$

$$= \frac{1}{\sqrt{23}}\ln\left|x+\sqrt{x^2-14/23}\right| + C.$$

3) $\displaystyle\int \frac{x^3}{1-x^8}dx = -\frac{1}{4}\int \frac{d(x^4)}{x^8-1} = -\frac{1}{8}\ln\left|\frac{x^4-1}{x^4+1}\right| + C.$

4) $$\int \frac{dx}{\sqrt{3x^2+6x-1}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2+2x+1)-1-\frac{1}{3}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{3}}\int \frac{d(x+1)}{\sqrt{(x+1)^2-\frac{4}{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\ln\left|x+1+\sqrt{x^2+2x-\frac{1}{3}}\right|+C.\bullet$$

Навчальна задача 3.6.

Знайти інтеграли:

1) $\int x\sqrt[3]{x+1}dx$;

2) $\int x(3x-10)^{20}dx$;

3) $\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx$.

❍1) Щоб знайти інтеграл, запровадьмо нову змінну $t=\sqrt[3]{x+1}$; тоді $x=t^3-1, dx=3t^2dt$; і згідно з формулою заміни змінної маємо:

$$\int x\sqrt[3]{x+1}dx = \int (t^3-1)t\cdot 3t^2dt \,\Big|_{t=\sqrt[3]{x+1}} .$$

Розв'язання задачі варто оформити так:

$$\int x\sqrt[3]{x+1}dx = \left|\begin{array}{l} x+1=t^3, x=t^3-1 \\ dx=3t^2dt \end{array}\right| =$$

$$= \int (t^3-1)t\cdot 3t^2dt = 3\int (t^3-1)t^3dt =$$

$$3\left(\int t^6dt - \int t^3dt\right) = 3\left(\frac{t^7}{7}-\frac{t^4}{4}\right)+C =$$

$$= \left|t=\sqrt[3]{x+1}\right| = \frac{3}{7}\sqrt[3]{(x+1)^7} - \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x+1)^4}+C.$$

2) $$\int x(3x-10)^{20}dx = \left|\begin{array}{l} 3x-10=t \\ x=\dfrac{t+10}{3} \\ dx=\dfrac{1}{3}dt \end{array}\right| = \int \frac{t+10}{3}t^{20}\cdot\frac{1}{3}dt =$$

$$= \frac{1}{9}\int (t^{21}+10t^{20})dt = \frac{1}{9}\left(\frac{t^{22}}{22}+\frac{10t^{21}}{21}\right)+C =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{(3x-10)^{22}}{22}+\frac{10}{21}(3x-10)^{21}\right)+C.$$

$$3)\int \frac{e^{3x}}{\sqrt{1-e^x}}dx = \left| \begin{array}{l} t = \sqrt{1-e^x}, \\ x = \ln\left(1-t^2\right) \\ dx = -\dfrac{2tdt}{1-t^2} \end{array} \right| = -2\int \frac{(1-t^2)^3}{t}\cdot\frac{tdt}{1-t^2} =$$

$$= -2\int (t^4-2t^2+1)dt = -2\left(\frac{t^5}{5}-\frac{2t^3}{3}+t\right)+C =$$

$$= -\frac{2}{5}\sqrt{(1-e^x)^5}+\frac{4}{3}\sqrt{(1-e^x)^3}-2\sqrt{1-e^x}+C. \bullet$$

Задачі для самостійного розв’язання

Задача 3.1. Знайдіть уведенням функції під знак диференціала:

1) $\int (x+1)^{15}dx$;
2) $\int \dfrac{dx}{(2x-3)^5}$;
3) $\int \sqrt[5]{(8-3x)^6}dx$;
4) $\int \sqrt{8-2x}dx$;
5) $\int 2x\sqrt{x^2+1}dx$;
6) $\int \dfrac{xdx}{\sqrt{x^2+1}}$;
7) $\int x^2\sqrt[5]{x^3+2}dx$;
8) $\int \dfrac{x^4dx}{\sqrt{4+x^5}}$;
9) $\int \sin^3 x\cos xdx$;
10) $\int \dfrac{\sin xdx}{\cos^2 x}$;
11) $\int \dfrac{\sqrt{\ln x}}{x}dx$;
12) $\int \dfrac{(\operatorname{arctg} x)^2dx}{1+x^2}$;
13) $\int \cos 3xdx$;

14) $\int \sin(2x-3)dx;$

15) $\int \cos(1-2x)dx;$

16) $\int e^{\sin x}\cos x dx;$

17) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-25x^2}};$

18) $\int \frac{dx}{1+9x^2};$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}};$

20) $\int \frac{dx}{2x^2+9};$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{4-9x^2}};$

22) $\int \frac{xdx}{x^4+1};$

23) $\int \frac{2x-\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$

24) $\int \frac{x+(\arccos 3x)^2}{\sqrt{1-9x^2}}dx;$

25) $\int \frac{dx}{x^2+2x+3};$

26) $\int \frac{dx}{x^2-2x-3};$

27) $\int \frac{dx}{\sqrt{8+6x+9x^2}};$

28) $\int \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}};$

❍ 1) $\frac{(x+1)^{16}}{16}+C$; 2) $C-\frac{1}{8(2x-3)^5}$; 3) $C-\frac{5}{33}(8-3x)^{11/5}$;
4) $C-\frac{\sqrt{(8-2x)^3}}{3}$; 5) $\frac{2}{3}\sqrt{(x^2+1)^3}+C$;6) $\sqrt{x^2+1}+C$; 7) $\frac{5}{18}\sqrt[5]{(x^3+2)^6}+C$;
8) $\frac{2}{5}\sqrt{4+x^5}+C$; 9) $\frac{1}{4}\sin^4 x+C$;10) $\frac{1}{\cos x}+C$; 11) $\frac{2}{3}\sqrt{\ln^3 x}+C$;

12) $\dfrac{\operatorname{arctg}^3 x}{3}+C$; 13) $\dfrac{1}{3}\sin 3x+C$; 14) $C-\dfrac{1}{2}\cos(2x-3)$;

15) $C-\dfrac{1}{2}\sin(1-2x)$; 16) $e^{\sin x}+C$; 17) $\dfrac{1}{5}\arcsin 5x+C$;

18) $\dfrac{1}{3}\operatorname{arctg} 3x+C$; 19) $\arcsin\dfrac{x}{2}+C$; 20) $\dfrac{1}{3\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{\sqrt{2}}{3}x+C$;

21) $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x}{2}+C$; 22) $\dfrac{1}{2}\operatorname{arctg} x^2+C$; 23) $C-2\sqrt{1-x^2}-\dfrac{2}{3}\sqrt{(\arcsin x)^3}$;

24) $C-\dfrac{1}{9}(\sqrt{1-9x^2}+\arccos^2 3x)$. 25) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{arctg}\dfrac{x+1}{\sqrt{2}}+C$;

26) $\dfrac{1}{4}\ln\left|\dfrac{x-3}{x+1}\right|+C$; 27) $\dfrac{1}{3}\ln(3x+1+\sqrt{9x^2+6x+8})+C$;

28) $\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{3x+1}{\sqrt{3}}+C$.●

Задача 3.2. Знайдіть таку функцію f, що:

1) $f'(x)=x^2+4x+1, f(-1)=1$;

2) $f(x)=\sin x+\cos x, f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=2$.

❍1) $f(x)=\dfrac{x^3}{3}+2x^2+x+\dfrac{1}{3}$; 2) $f(x)=\sin x-\cos x+1$.●

Задача 3.3. Застосовуючи заміну змінної, знайдіть:

1) $\int x(5x-1)^{19}dx$;

2) $\int \dfrac{xdx}{(2x+1)^7}$;

3) $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt{x}}$;

4) $\int \dfrac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$;

5) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;

6) $\int e^{\sqrt{x}}dx$.

❍1) $\dfrac{1}{25}\left(\dfrac{(5x-1)^{21}}{21}+\dfrac{(5x-1)^{20}}{20}\right)+C$; 2) $-\dfrac{1}{120}\cdot\dfrac{12x+1}{(2x+1)^6}+C$;

3) $2(\sqrt{x}-\ln(1+\sqrt{x}))+C$;

4) $\dfrac{3}{2}(x+1)^{2/3} - 3(x+1)^{1/3} + 3\ln\left|1+\sqrt[3]{x+1}\right| + C$;

5) $\ln\dfrac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1} + C$; 6) $2e^{\sqrt{x}}(\sqrt{x}-1) + C$. ●