Навчальні задачі

Навчальна задача 1.1.

Написати ряд в розгорнутому вигляді, якщо $a_n = \dfrac{3+(-1)^n}{n!}$, $n = 1,2,\ldots$.

❍ $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, $a_3 = \dfrac{1}{3}$, $a_4 = \dfrac{1}{6}$, $a_5 = \dfrac{1}{60}, \ldots$.

Таким чином ,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3+(-1)^n}{n!} = 2 + 2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{60} + \ldots . \; ●$$

Навчальна задача 1.2.

Відновити ряд за його частковою сумою $S_n = 3 + \dfrac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}$, $n = 1,2,\ldots$.

❍ Необхідно знайти загальний член ряду. Маємо

$$S_n = S_{n-1} + a_n,$$

$$S_n = 3 + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}, \quad S_{n-1} = 3 + \frac{(-1)^{n-2}}{3^{n-2}}.$$

Отже,

$$a_n = S_n - S_{n-1} = \left(3 + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}\right) - \left(3 + \frac{(-1)^{n-2}}{3^{n-2}}\right) =$$

$$= 3 + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}} - 3 + \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-2}} = \frac{(-1)^{n-1}}{3^{n-1}}(1+3) = (-1)^{n-1}\frac{4}{3^{n-1}}.$$

Таким чином, одержали ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{4}{3^{n-1}}$. ●

Навчальна задача 1.3.

Знайти n - у часткову суму S_n ряду

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

❍ $$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5} +$$

$$+ \ldots \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}.$$

Запишемо a_k у вигляді:

$$a_k = \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} = \frac{\frac{1}{2}}{k+1} - \frac{1}{k+2} + \frac{\frac{1}{2}}{k+3}.$$

Тоді

$$S_n = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+3} =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} - \sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n+2}\frac{1}{k+1} = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1}\right) -$$

$$-\left(\frac{1}{3} + \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{n+2}\right) + \left(\frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n+3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{3} - \sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1} - \frac{1}{n+2} + \frac{1}{2}\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k+1} +$$

$$+\frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)} = \frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)}.$$

Отже,

$$S_n = \frac{1}{12} - \frac{1}{2(n+2)} + \frac{1}{2(n+3)}, \text{ а } \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{1}{12}.$$

Таким чином, сума ряду $S = \dfrac{1}{12}$. ●

Навчальна задача 1.4.

Довести (за означенням) збіжність ряду $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{5^n + 7\cdot 6^n}{9^n}$ та знайти його суму.

❍ Ряд, як відомо, називають збіжним, якщо існує скінченна границя послідовності його часткових сум. Знайдемо S_n:

$$S_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{5^k + 7\cdot 6^k}{9^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{5}{9}\right)^k + 7\cdot\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^k = 1\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{9}\right)^n}{1-\frac{5}{9}} + 7\cdot\frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} =$$

$$= \frac{9}{4}\cdot\left(1-\left(\frac{5}{9}\right)^n\right) + 21\cdot\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right).$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{9}{4}\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{5}{9}\right)^n\right) + 21\lim_{n\to\infty}\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = \frac{9}{4} + 21 = \frac{93}{4} < +\infty$$

$$\left(q_1 = \frac{5}{9} < 1,\quad q_2 = \frac{2}{3} < 1\right).$$

Таким чином, ряд збігається і сума ряду $S = 23\frac{1}{4}$. ●

Навчальна задача 1.5.

Довести, якщо

$$a_n = b_n - b_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}, \text{ і } \exists \lim_{n\to\infty} b_n = b < +\infty,$$

тоді ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ збігається і його сума

$$S = b_1 - b\,.$$

❍ $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1}) = (b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \ldots$
$+ (b_{n-1} - b_n) + (b_n - b_{n+1}) = b_1 - b_{n+1}.$

Оскільки

$$\lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b\,,$$

тому

$$\lim_{n\to\infty} S_n = b_1 - \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = b_1 - b < +\infty.$$

Таким чином, існує скінченна границя послідовності часткових сум ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Отже, ряд збігається і $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = b_1 - b$. ●

Навчальна задача 1.6.

Знайти суму ряду $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{n+2} - 2\cdot\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$.

❍ Загальний член заданого ряду можна записати у вигляді:

$$a_n = \sqrt{n+2} - 2\cdot\sqrt{n+1} + \sqrt{n} =$$
$$= (\sqrt{n+2} - \sqrt{n+1}) - (\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) =$$
$$= b_{n+1} - b_n = -(b_n - b_{n+1})\,.$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0, b_1 = \sqrt{2} - 1.$$

Робимо висновок (див. *Навчальна задача 1.5*) , що ряд збігається і його сума

$$S = 1 - \sqrt{2}\,.●$$

Навчальна задача 1.7.

Застосовуючи необхідну умову збіжності ряду, довести, що ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{2n-3}{2n+1})^n$ розбігається.

❍ Для даного ряду

$$a_n = \frac{2n-3}{2n+1}^{\,n} = \left(\frac{1-\frac{3}{2n}}{1+\frac{1}{2n}}\right)^n, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = \frac{e^{-\frac{3}{2}}}{e^{\frac{1}{2}}} = e^{-2} \neq 0\,.$$

Не виконується необхідна умова збіжності ряду, отже, ряд розбігається. ●

Навчальна задача 1.8.

Застосовуючи критерій Больцано – Коші, довести розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}$.

❍ Розглянемо

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right| = \frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{2n+2p-1}.$$

Покладемо $\varepsilon=\frac{1}{4}$, $p=2n$:

$$\left|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}\right| =$$
$$=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+3}+\ldots+\frac{1}{6n-1}>$$
$$>\frac{1}{6n}+\frac{1}{6n}+\ldots+\frac{1}{6n}=\frac{2n}{6n}=\frac{1}{3}>\varepsilon=\frac{1}{4}.$$

Це й означає, що заданий ряд розбігається. ●

Задачі для самостійного розв'язання

Задача 1.1. Записати перші п'ять членів ряду за заданим загальним членом:

1) $a_n=\frac{1}{2n+1}$;

2) $a_n=\frac{2^n}{n!}$;

3) $a_n=(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n}$;

4) $a_n=\frac{(2n-1)!!}{n\cdot 2^{n+1}}$

$((2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1))$.

❍ 1) $\frac{1}{3},\frac{1}{5},\frac{1}{7},\frac{1}{9},\frac{1}{11}$; 2) $2,2,\frac{4}{3},\frac{2}{3},\frac{4}{15}$;

3) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\frac{1}{5}$; 4) $\frac{1}{4},\frac{3}{16},\frac{5}{16},\frac{105}{128},\frac{189}{64}$. ●

Задача 1.2. Знайти часткову суму S_n та суму S ряду:

1) $\frac{1}{1\cdot4}+\frac{1}{2\cdot5}+\ldots+\frac{1}{n(n+3)}+\ldots$;

2) $\operatorname{arctg}\frac{1}{2}+\operatorname{arctg}\frac{1}{8}+\ldots+\operatorname{arctg}\frac{1}{2n^2}+\ldots$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^2+5n+6}{n^2+5n+4}$.

❍1) $S_n=\frac{1}{3}\cdot\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)$, $S=\frac{11}{18}$;

2) $S_n = \operatorname{arctg}\dfrac{n}{n+1}$, $S = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $S_n = \ln 4 - \ln 2 + \ln(n+2) - \ln(n+4)$, $S = \ln 2$. ●

Задача 1.3. Знайти суму ряду, застосовуючи результат *Навчальної задачі 1.5*:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(3n-2)\cdot(3n+1)}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\sqrt[3]{n+2} - 2\cdot\sqrt[3]{n+1} + \sqrt[3]{n})$.

❍ 1) $\dfrac{1}{3}$; 2) $1 - \sqrt[3]{2}$. ●

Задача 1.4. Перевірити виконання необхідної умови збіжності ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sqrt[4]{n^3} - 25}{\sqrt{n} + 50}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln(n+1)}{\sqrt{n+1}}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n+3}{5^n}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{4n^2 + 3n - 1}{n+2} \cdot \operatorname{tg}\dfrac{3}{n}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (3n+1)(\sqrt{n^2+1} - n)$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{1+n}{n}\right)^{\frac{n}{4}}$.

❍ 1) не виконується; 2) виконується; 3) виконується; 4) не виконується; 5) не виконується; 6) не виконується. ●

Задача 1.5. Довести розбіжність рядів, застосовуючи достатню умову розбіжності ряду:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{0{,}08}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n^2+3)\ln\left(\dfrac{n^2+5}{n^2}\right)$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3+1}{n+7} \arcsin\dfrac{2}{n^2+3}$.

Задача 1.6.

Застосовуючи критерій Больцано – Коші, довести розбіжність ряду $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, якщо:

1) $a_n = \dfrac{n+1}{n^2+4}$; 2) $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.